FISICA

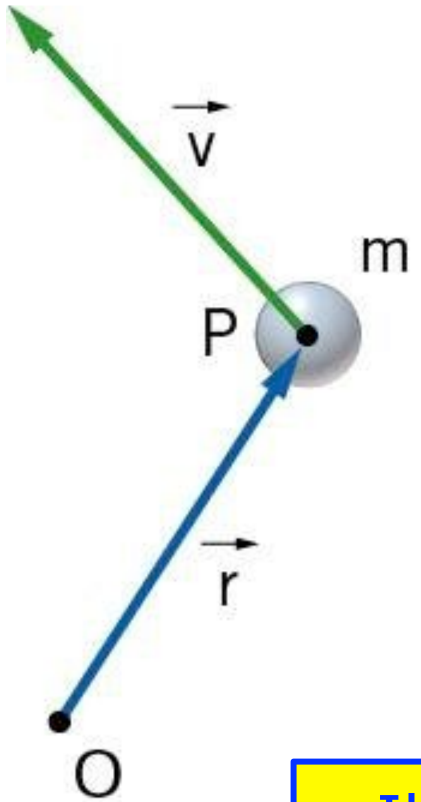
MECCANICA:
Principio conservazione momento angolare

Autore: prof. Pappalardo Vincenzo
docente di Matematica e Fisica

MOMENTO ANGOLARE

Fino a questo punto abbiamo esaminato soltanto moti di traslazione. Passiamo ora a esaminare i moti di rotazione.

Per descrivere la rotazione di un punto materiale si introduce una nuova grandezza fisica, il **momento angolare L** calcolato rispetto a un punto fisso O.



Consideriamo una particella di massa m che si muove con velocità **v** e che, a un certo istante, si trova nel punto P.

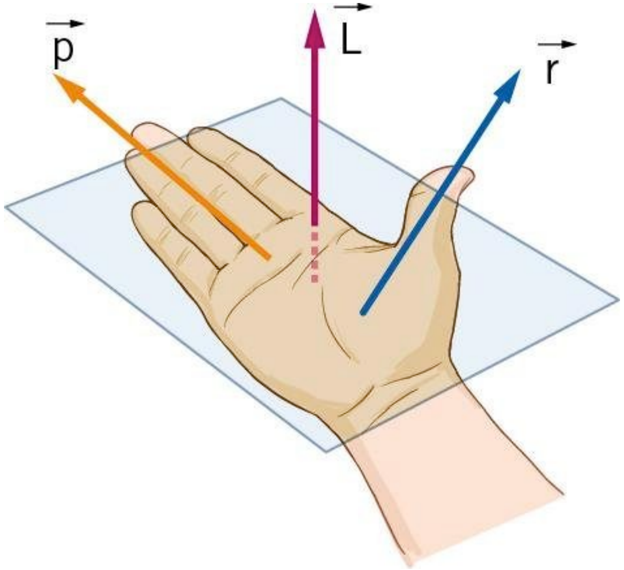
Indichiamo con **r** il vettore che dà la posizione di P rispetto al punto O.

Diamo la seguente definizione:

Il momento angolare di una particella è uguale al prodotto vettoriale tra il vettore **r** e la quantità di moto **p** della particella:

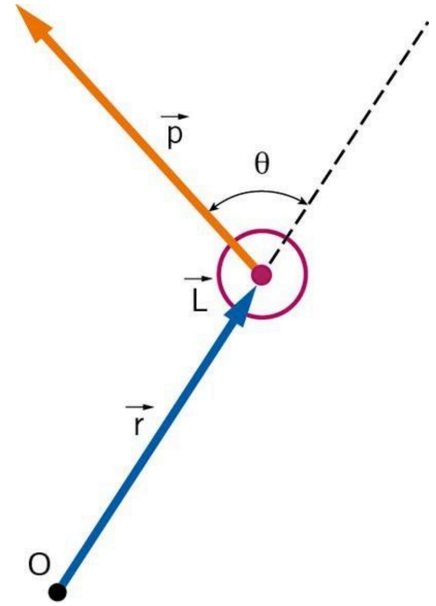
$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \otimes \vec{p}} \qquad \left[kg \cdot m^2 / s\right]$$

Per la definizione di prodotto vettoriale, il momento angolare ha:



1. direzione perpendicolare al piano che contiene **r** e **p**

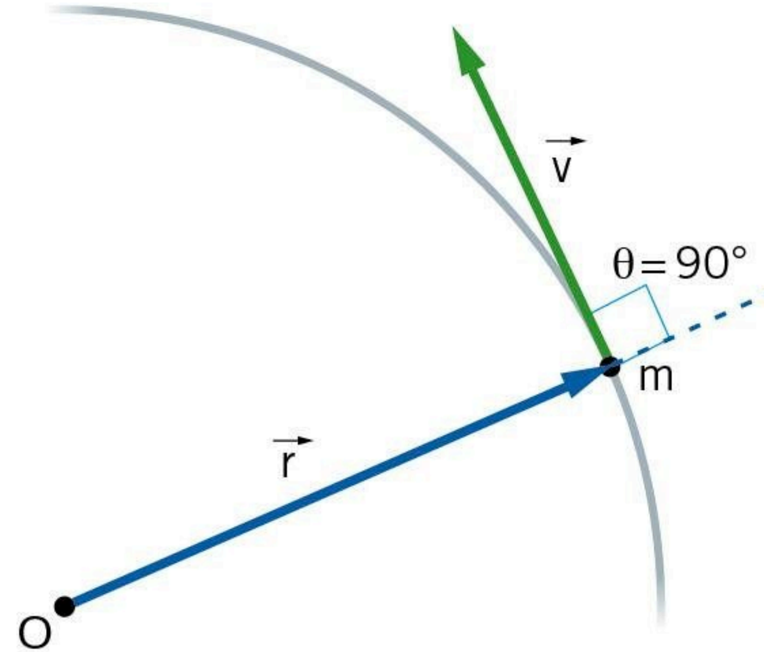
2. verso dato dalla regola della mano destra



3. modulo L dato dalla formula:

$$L = r \cdot p \cdot \operatorname{sen}\vartheta$$

Il caso più semplice è quello in cui l'angolo θ è retto (sen θ =1).



Esempio – Il momento angolare di un punto materiale m che si muove di moto circolare con velocità **v**, e che abbia come punto O il centro della traiettoria circolare, è dato dato da:

$$L = rpsen\vartheta = rp = rmv = mr^2\omega$$

Ossia:

$$\boxed{L = I\omega}$$

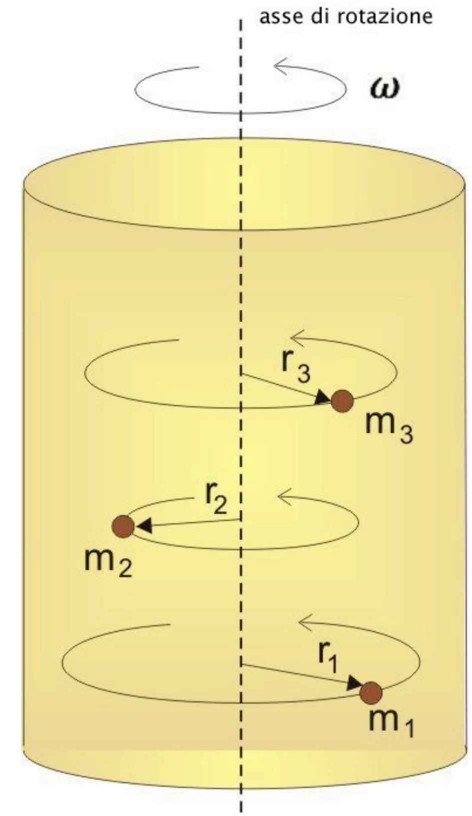
La quantità $I = mr^2$ si chiama momento d'inerzia

Il momento d'inerzia assume, nel moto rotatorio, un ruolo analogo a quello che ha la massa nel moto rettilineo:

come la massa quantifica la resistenza che un corpo oppone al cambiamento della sua velocità quando è soggetto a una forza, così il momento d'inerzia misura la resistenza del corpo al cambiamento della sua velocità angolare quando è soggetto a un momento torcente.

Consideriamo ora un corpo rigido (di forma qualsiasi) in rotazione intorno a un asse.

Il corpo può essere immaginato come composto da un insieme di particelle, ciascuna assimilabile a un punto materiale in movimento lungo una circonferenza con centro sull'asse.



Il momento angolare del corpo rigido è dato dalla somma vettoriale dei momenti angolari degli n punti materiali che lo compongono, calcolati rispetto allo stesso punto O:

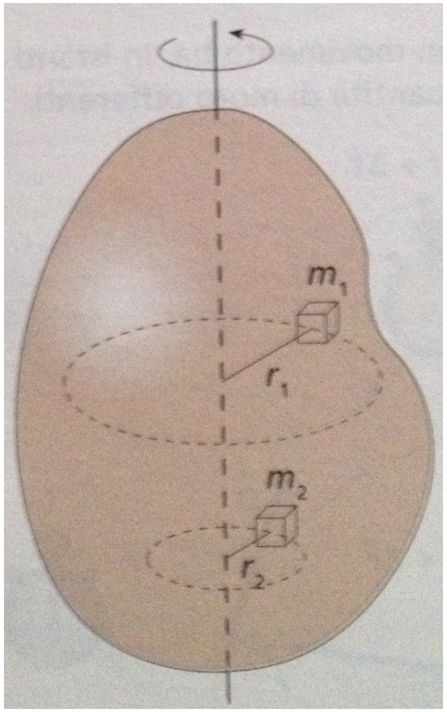
$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i}$$

E quindi la somma dei momenti d'inerzia di tutti i punti materiali costituisce il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione:

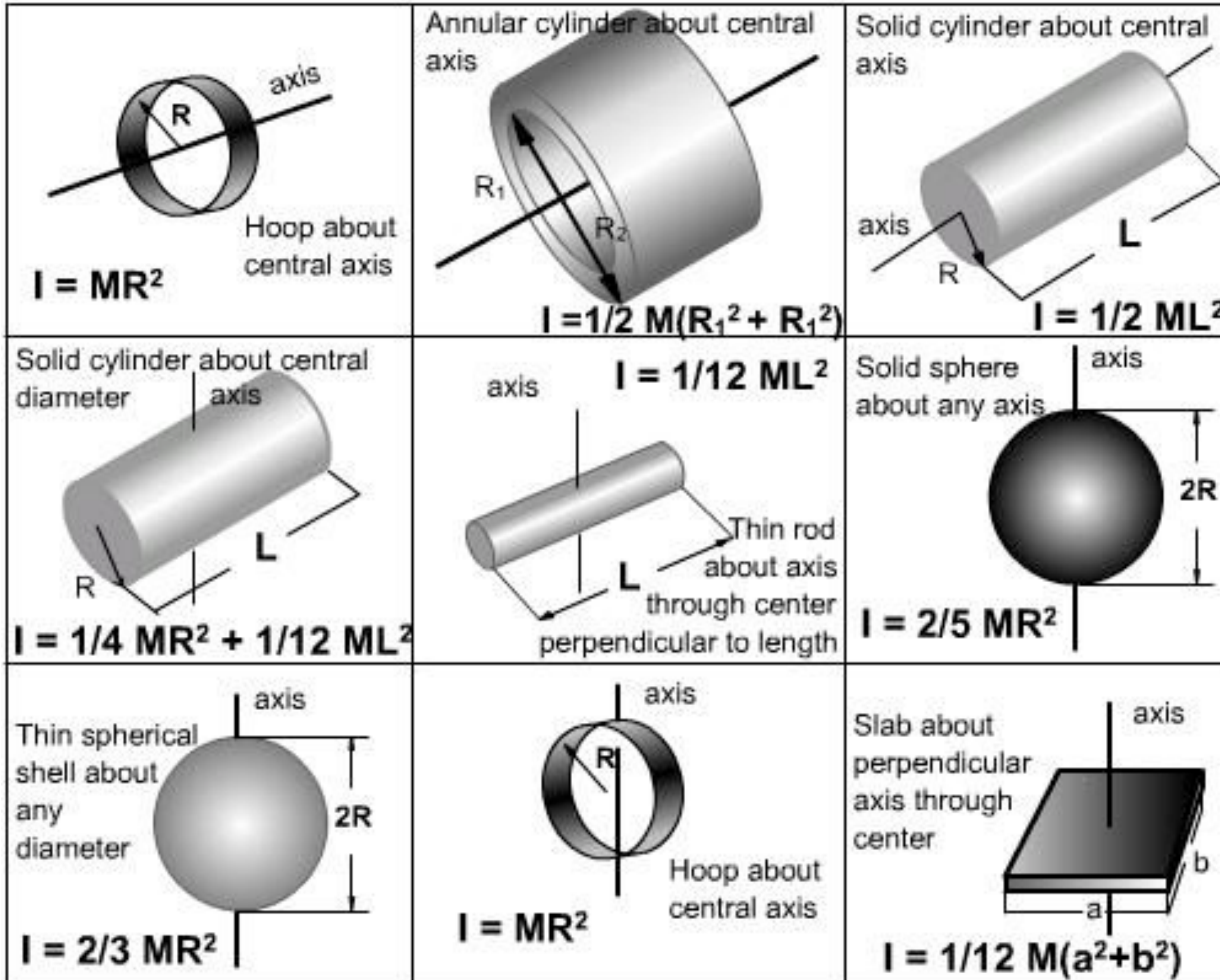
$$\boxed{I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$$

Se il corpo rigido ha forma irregolare, il calcolo del momento d'inerzia risulta molto complicato e bisogna far uso del calcolo integrale:

$$\boxed{I = \int r^2\, dm}$$



Per i solidi simmetrici il momento d’inerzia rispetto all’asse di rotazione può essere espresso in modo semplice in funzione della massa e di alcuni parametri geometrici.


axis
R
Hoop about central axis
I = MR²
Annular cylinder about central axis
R₁
R₂
I =1/2 M(R₁² + R₁²)
Solid cylinder about central axis
axis
R
L
I = 1/2 ML²
Solid cylinder about central diameter
axis
R
L
I = 1/4 MR² + 1/12 ML²
axis
I = 1/12 ML²
L
Thin rod about axis through center perpendicular to length
Solid sphere about any axis
axis
2R
I = 2/5 MR²
axis
Thin spherical shell about any diameter
2R
I = 2/3 MR²
axis
R
Hoop about central axis
I = MR²
Slab about perpendicular axis through center
axis
b
a
I = 1/12 M(a²+b²)

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Se per i moti traslatori valeva il teorema dell'impulso, per i moti rotatori vale la seguente equazione:

EQUAZIONE DEL MOTO ROTATORIO

Se a un corpo è applicato, per un intervallo di tempo Δt, un momento torcente costante **M** rispetto a un punto O, la variazione Δ**L** del momento angolare del corpo rispetto a O è descritta dalla seguente equazione:

$$\boxed{\Delta\vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t}$$

Enunciamo anche per il moto rotatorio un principio di conservazione.

PRINCIPIO CONSERVAZIONE MOMENTO ANGOLARE

Se rispetto a un punto è nullo il momento risultante delle forze che agiscono su un sistema fisico, il momento angolare totale del sistema rispetto allo stesso punto si conserva:

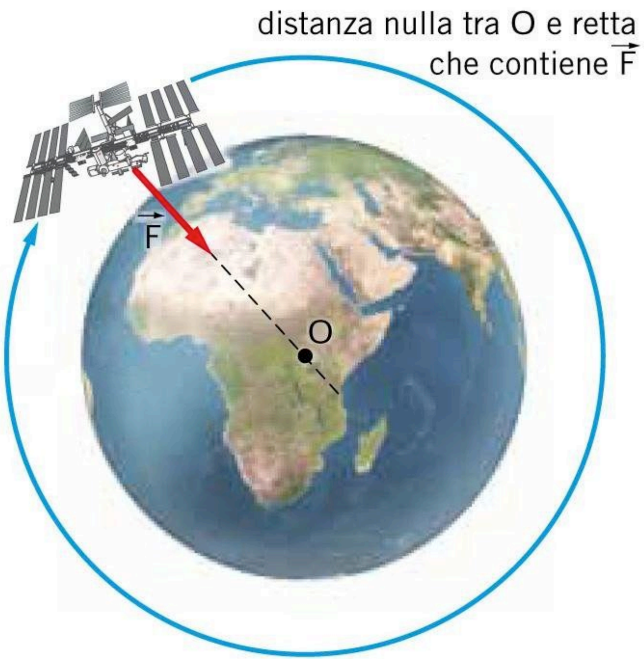
$$\boxed{\vec{L} = \text{costante}}$$

Infatti, dall'equazione del moto rotatorio si ha che:

$$\text{se } \vec{M} = 0 \;\rightarrow\; \Delta\vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t = 0 \;\rightarrow\; \vec{L} = \text{costante}$$

Il momento angolare è un vettore e quando si conserva rimane invariato, oltre al modulo, anche la sua direzione e verso.

esempio



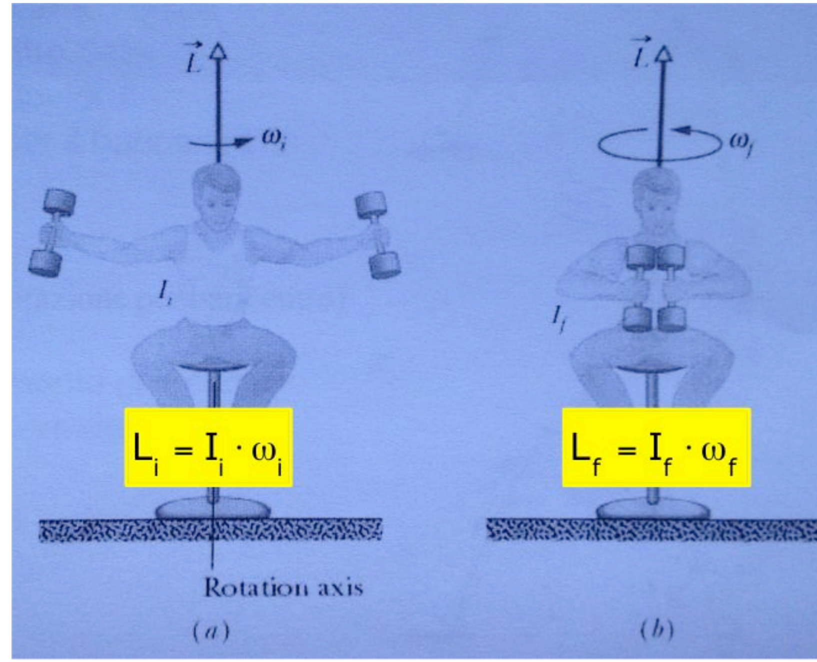
Sul satellite agisce la forza di gravità **F**. In questo caso il braccio di **F**, rispetto al centro di rotazione O è uguale a zero e, quindi, il suo momento **M** è nullo: il momento angolare **L** del satellite si conserva.

Le forze costantemente orientate verso uno stesso punto sono dette forze centrali.

esempio

Il ragazzo con le braccia allargate ha come momento d'inerzia $I_{i,}$ e viene messo in rotazione con una certa velocità angolare $\omega_{i.}$ Il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è:

$$\boxed{L_i = I_i \cdot \omega_i}$$



Quando le braccia vengono chiuse, il ragazzo ha come momento d'inerzia $I_{f,}$ e ruota con velocità angolare $\omega_{f.}$ Il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è:

$$\boxed{L_f = I_f \cdot \omega_f}$$

Il sistema fisico in esame è un sistema isolato (momento delle forze esterne nullo) per cui è possibile applicare il principio di conservazione del momento angolare rispetto all'asse di rotazione.

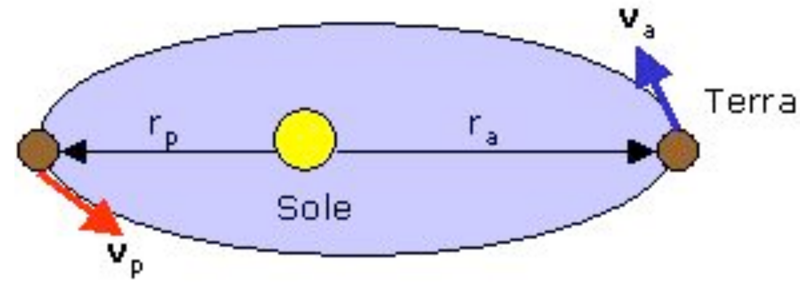
$$\boxed{L = I \cdot \omega = \text{costante}}$$

$$\boxed{I_i \cdot \omega_i = I_f \cdot \omega_f} \qquad \boxed{I_f < I_i \Rightarrow \omega_f > \omega_i}$$

Conclusione: Quando le braccia vengono chiuse, il momento d'inerzia I_f diminuisce e, per la conservazione del momento angolare, la velocità angolare ω_f deve aumentare.

esempio

La velocità della Terra all'afelio è $v_a=2,93 \cdot 10^4$ m/s e la sua distanza è $r_a=1,52 \cdot 10^{11}$ m. Calcolare la velocità della Terra al perielio dove la distanza è $r_p=1,47 \cdot 10^{11}$ m.



Ipotesi: Terra puntiforme; effetto nullo di tutte le forze esterne al sistema Sole+Terra.

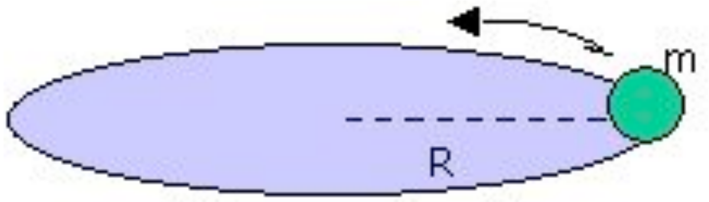
Possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_a = \vec{L}_p \Rightarrow m_T v_a r_a = m_T v_p r_p \Rightarrow v_p = \frac{r_a}{r_p} \cdot v_a = \frac{1,52 \cdot 10^{11}}{1,47 \cdot 10^{11}} \cdot 2,93 \cdot 10^4 = 3,03 \cdot 10^4 \, m/s$$

Come ci aspettavamo, al perielio la velocità della Terra aumenta.

esempio

Una persona di massa M=80kg salta sull'unico seggiolino di una giostra in rotazione a velocità angolare costante. Sapendo che il raggio della giostra è R=5m, che la massa del seggiolino è m=100kg e che compie 1 giro in 4s, calcolare il periodo di rotazione della giostra dopo che la persona è salita, nell'ipotesi di trascurare la velocità iniziale della persona e gli attriti.



Ipotesi: massa puntiforme; forze esterne nulle.

Principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow m\cancel{R^2}\omega_i = (m+M)\cancel{R^2}\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{m}{m+M}\cdot\omega_i = \frac{100}{180}\cdot 1{,}57 = 0{,}87\,rad/s$$

$$dove:\quad \omega_i = \frac{2\pi}{T_i} = \frac{2\pi}{4} = 1{,}57\,rad/s \Rightarrow T_{giostra} = \frac{2\pi}{\omega_f} = \frac{2\pi}{0{,}87} = 7{,}2\,s$$

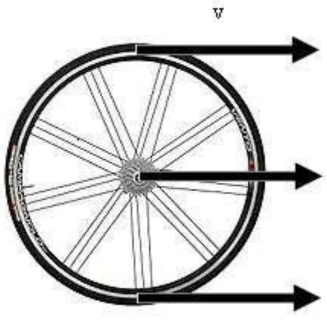
ENERGIA CINETICA CORPO RIGIDO

Grazie all'introduzione del momento d'inerzia, è possibile esprimere in maniera semplice l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione.

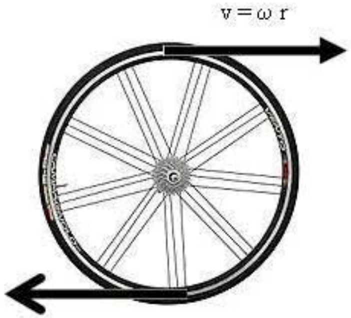
ENERGIA CINETICA DI ROTAZIONE

L'energia cinetica di un corpo rigido con momento d'inerzia I, e in rotazione intorno a un asse fisso con velocità angolare ω, è data dalla seguente formula:

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$



Moto di traslazione



Moto di rotazione

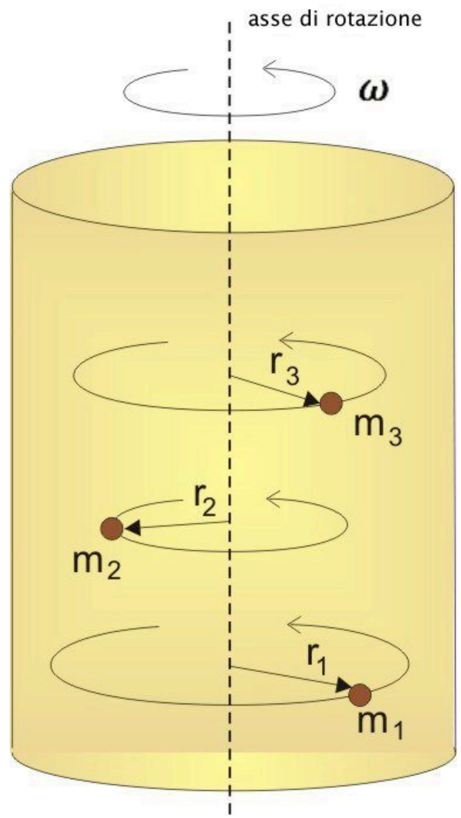
Il moto di rotolamento è la combinazione di due moti simultanei: la rotazione del corpo intorno all'asse e la traslazione dell'asse.

Quindi, l'energia cinetica è data dalla somma di due contributi, quello traslatorio e quello rotatorio:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$$

DINAMICA ROTAZIONALE CORPO RIGIDO

Ricaviamo la legge che descrive la dinamica rotazionale di un corpo rigido.



Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno a un asse con velocità angolare ω e che, quindi, ha momento angolare $L=I\omega$.

Il corpo rigido viene accelerato fino alla velocità angolare ω_1, per cui il momento angolare diventa $L_1=I\omega_1$.

La variazione ΔL del momento angolare vale:

$$\Delta L = L_1 - L = I(\omega_1 - \omega) = I\Delta\omega$$

Nota l'equazione del moto rotatorio, si ha:

$$\Delta L = M \cdot \Delta t = I\Delta\omega \Rightarrow M = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \xrightarrow{\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ acc. angolare}} M = I\alpha$$

EQUAZIONE DEL MOTO ROTATORIO

$$\boxed{M = I\alpha}$$

Questa equazione descrive la rotazione di un corpo rigido, analoga a quella che descrive il moto di traslazione F=ma.